

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

23 februarie 2014

Clasa a VII-a

Barem de evaluare

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$\left. \begin{aligned} ab+5-c + bc+1-a + ac+1-b &= 0 \\ ab+5-c &\geq 0, (A), (\forall) a,b,c \in \mathbb{Z} \\ bc+1-a &\geq 0, (A), (\forall) a,b,c \in \mathbb{Z} \\ ac+1-b &\geq 0, (A), (\forall) a,b,c \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} ab+5-c=0 \\ bc+1-a=0; \\ ac+1-b=0 \end{cases}$	2p
	$\begin{cases} bc+1-a=0 \\ ac+1-b=0 \end{cases} \Rightarrow c \cdot (b-a) + b-a = 0 \Leftrightarrow (b-a) \cdot (c+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ \text{sau} \\ c=-1 \end{cases}$	2p
	<p>1. Dacă $c = -1$ atunci $\begin{cases} a \cdot b = -6 \\ a+b=1 \\ a,b \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases};$</p> $\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \\ c=-1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases} \text{ convin.}$	2p
	<p>2. Dacă $a = b$ atunci relația a doua devine $ac+1-a=0 \Rightarrow a \cdot (1-c) = 1;$</p> $\begin{aligned} a \cdot (1-c) = 1 \\ a,b \in \mathbb{Z} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a=1=b \\ c=0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} c=2 \\ a=-1=b \end{cases}$ <p>Aceste valori nu verifică relația $ab+5-c=0 \Rightarrow$ nu convin.</p> <p>Soluțiile sunt $\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \\ c=-1 \end{cases}; \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases}$</p>	1p

2.	$CF \parallel AD \xRightarrow{T.F.A} \triangle CFE \sim \triangle DAE \Rightarrow \frac{CF}{AD} = \frac{CE}{DE} = \frac{EF}{AE}$ $GD \parallel BC \xRightarrow{T.F.A} \triangle GDE \sim \triangle BCE \Rightarrow \frac{GD}{BC} = \frac{DE}{CE} = \frac{GE}{BE}$	2p
	$\left. \begin{array}{l} \frac{CF}{AD} = \frac{CE}{DE} \\ \frac{GD}{BC} = \frac{DE}{CE} \end{array} \right\} \xRightarrow{(\cdot)} \frac{CF}{AD} \cdot \frac{GD}{BC} = 1 \Rightarrow AD^2 = DG \cdot CF \Rightarrow$	3p
	$AD = \sqrt{DG \cdot CF} \leq \frac{DG + CF}{2}.$	2p
3.	<p>Fie $ON \cap BC = \{P\}$; $[OP]$ este linie mijlocie în triunghiul BDM \Rightarrow punctul P este mijlocul $[BM]$</p>	2p
	$\left. \begin{array}{l} DM \parallel NP \\ DN \parallel MP \end{array} \right\} \Rightarrow DMPN \text{ paralelogram} \Rightarrow [DN] \equiv [MP];$	3p
	$AN = AD - ND = BC - BP = CP; \frac{AN}{ND} = \frac{CP}{MP} = 3.$	2p
4.	$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}.$	2p
	$2 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2 \cdot n + 1)} \right) = 1 - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2013} \quad (1)$ $\left. \begin{array}{l} \frac{2}{1 \cdot 3} = 1 - \frac{1}{1 \cdot 3} \\ \frac{4}{1 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} \\ \frac{6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \\ \vdots \\ \frac{2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2 \cdot n + 1)} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2 \cdot n - 1)} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2 \cdot n + 1)} \end{array} \right\} \xRightarrow{(+)} \Rightarrow$	3p
	$2 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2 \cdot n + 1)} \right) = 1 - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \quad (2)$ <p>Din (1) și (2) $\Rightarrow 2n+1=2013 \Rightarrow n=1006.$</p>	2p